Е. Е. Григорьев, А. А. Жидков
Нижегородский государственный университет,
Grigorev.Evgenii@gmail.com, Artem.Zhidkov@gmail.com

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

В настоящее время наблюдается высокий интерес к математическому и численному моделированию метеорологических явлений [1], [2], что в первую очередь связано с изучением климатических изменений и прогнозированием погоды. В современной науке преобладает концепция, что электромагнитные явления, происходящие в атмосфере Земли, оказывают существенное влияние на формирование погодных процессов и климата в целом. Одной из актуальных задач теории атмосферного электричества является проблема глобальной электрической цепи в атмосфере (наблюдаемая достаточно постоянная разность потенциалов между ионосферой и поверхностью Земли). Последние экспериментальные данные подтверждают гипотезу, сформулированную Вильсоном ещё в 1921 г. [3], о том, что глобальная электрическая цепь поддерживается за счёт грозовых образований, обладающих электрической структурой.

Следует отметить, что математическому обоснованию разрешимости задач теории атмосферного электричества и разработке новых алгоритмов численного решения посвящено достаточно мало работ [4].

Настоящая работа посвящена изучению разрешимости некоторых классов квазистационарных задач, возникающих при исследовании проблемы глобальной электрической цепи, и разработке новых алгоритмов численного решения таких задач.

Широкий класс задач атмосферного электричества описывается системой уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении, которое предполагает потенциальность вектора напряжённости электрического поля:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}(x,t)}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x,t) = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \vec{H}(x,t) = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E}(x,t) = 4\pi\rho(x,t). \tag{3}$$

Система уравнений (1) – (3) дополняется обобщённым законом Ома [5]

$$\vec{J}(x,t) = \sigma(x,t)\vec{E}(x,t) + \vec{J}^{\text{ст}}(x,t). \tag{4}$$

Рассматриваемая система (1) – (4) изучается в области $Q_T = \Omega \times [0,T]$, где область Ω диффеоморфна шаровому слою, граница $\partial\Omega$ состоит из двух компонент связности Γ_1 и Γ_2, каждая из которых диффеоморфна сфере в R^3.

Задача (1) – (4) дополняется начальными и граничными условиями

$$\vec{E}(x,t)\Big|_{t=0} = \vec{E}_0(x), \tag{5}$$

$$\vec{E}_\tau(x,t)\Big|_{x\in\Gamma_1} = 0, \;\; \vec{E}_\tau(x,t)\Big|_{x\in\Gamma_2} = 0. \tag{6}$$

Условие (6), представляющее собой условие абсолютно проводящей границы, возникает при учёте эмпирических фактов: 1) проводимость Земли существенно превышает проводимость приземных слоёв атмосферы, 2) проводимость атмосферы растёт по экспоненциальному закону при удалении от поверхности Земли.

Для задачи (1) – (6) формулируется обобщённая постановка в терминах скалярного электрического потенциала: *найти скалярную функцию* $\varphi \in C^1([0,T]; V(\Omega))$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad}\varphi(x,t)\cdot\operatorname{grad}\psi(x))\,dx +$$

$$+\,4\pi\int\limits_{\Omega}\sigma(x,t)\,(\operatorname{grad}\varphi(x,t)\cdot\operatorname{grad}\psi(x))\,dx =$$

$$= 4\pi\int\limits_{\Omega}\Big(\vec{J}^{\text{ст}}(x,t)\cdot\operatorname{grad}\psi(x)\Big)\,dx$$

и начальному условию $\varphi(x,t)|_{t=0} = \varphi_0(x)$ *для любой функции* $\psi \in V(\Omega)$.

Здесь $V(\Omega)$ — следующее гильбертово пространство

$$V(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_1} = 0,\ u|_{\Gamma_2} = \text{const}\right\}$$

со скалярным произведением

$$(u\cdot v)_{V(\Omega)} = \int_{\Omega}(\operatorname{grad} u(x)\cdot\operatorname{grad} v(x))\,dx.$$

Для данной задачи формулируются и доказываются теоремы о существовании и единственности решения, непрерывной зависимости решения от параметров задачи. Для численного решения предложена и реализована схема на основе метода Галёркина [4], [6].

Также в работе предлагается и обосновывается итерационный алгоритм решения задачи (1) – (6) в терминах напряжённости электрического поля и вихря магнитного поля. Данный метод основывается на обобщении ортогонального разложения пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$ в прямую сумму гильбертовых пространств [7]:

$$\overset{\circ}{\mathrm{Ker}}\,(\mathrm{rot}\,;\Omega) = \{\vec{u} \in H(\mathrm{rot}\,;\Omega) : \mathrm{rot}\,\vec{u} = 0,\ \vec{u}_\tau|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$\mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot}\,;\Omega) = \{\vec{u} = \mathrm{rot}\,\vec{v} : \vec{v} \in H(\mathrm{rot}\,;\Omega)\}.$$

Для нахождения напряжённости электрического поля $\vec{E}^{(j)}(t) \in \overset{\circ}{\mathrm{Ker}}\,(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ и вихря магнитного поля $\vec{F}^{(j)} \in \in \mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ в работе предлагается следующий итерационный процесс:

$$\frac{d}{dt}\vec{E}^{(j+1)}(t) + A_\sigma[\vec{E}^{(j+1)}(t)] + \vec{J}^{\text{ст}}(t) = \vec{F}^{(j+1)}(t),\ \vec{E}(0) = \vec{E}_0,$$

$$\vec{F}^{(j+1)}(t) = Pr_{\mathrm{rot}}\left[A_\sigma[\vec{E}^{(j)}(t)] + \vec{J}^{\text{ст}}(t)\right].$$

Здесь $A_\sigma : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \{L_2(\Omega)\}^3$ — оператор умножения $A_\sigma[u(t)] = \sigma(\cdot,t)\,u(\cdot,t)$; $Pr_{\mathrm{rot}} : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ — оператор проектирования.

В работе доказывается теорема о сходимости приведённого итерационного процесса к точному решению задачи (1) – (6). Отметим, что описанный процесс явно не зависит от пространственных координат, следовательно, решение соответствующих дифференциальных уравнений может проводиться в каждой точке пространства независимо от других точек. В этом случае приведённый алгоритм можно достаточно эффективно реализовать с помощью методов параллельных вычислений.

Авторы выражают благодарность доценту А. В. Калинину и профессору Е. А. Марееву за постановку задачи и обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)”

Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009 – 2013 годы (госконтракт НК-13П-13) и РФФИ (проект 09-01-97019-р_поволжье_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. *Численные методы в прогнозе погоды.* – Л.: Гидрометеоиздат, 1967. – 356 с.

2. Голицын Г. С. *Динамика природных явлений.* – М.: Физматлит, 2004. – 344.

3. Wilson C. T. R. *Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms* // Phil. Thans. R. Soc. Lond. A. – 1921. – V. 221. – P. 75-115.

4. Жидков А. А., Калинин А. В. *Корректность одной математической задачи атмосферного электричества* // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского. – 2009. – № 4. – С. 123-129.

5. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике.* – М.: Наука, 1980. – 384 с.

6. Жидков А. А., Калинин А. В. *Некоторые вопросы математического и численного моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере* // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского. – 2009. – № 6. – С. 150-158.

7. Темам Р. *Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ.* – М.: Мир, 1981. – 408 с.